Marius Burtea Georgeta Burtea
Valentin Nicula, Silvia Muşătoiu, Vasile Dilimoţ Niţă, Radu Copoiu, Maria Coşa,
Francisc Coşa, Mihaela Dinescu, Sorin Radu Dumitrică, Antoaneta Fenoghen, Gabriela Iscru,
Marius Mâinea, Mihael Mihalcea, Paraschiva Săndulescu, Marius Stanciu, Ionel Stănică,
Daniela Taclit, Tatiana Voicu

CLASA a IX-a
CULEGERE DE
MATEMATICĂ
Filiera teoretică,
specializarea matematică-informatică

semestrul I

- mulţimi şi elemente de logică matematică
- funcţii.
- vectori în plan
- coliniaritate, concurenţă, paralelism

CAMPION

CUPRINS

I MULŢIMI ŞI ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

1 MULŢIMEA NUMERELOR REALE

1.1 OPERAŢII CU NUMERE REALE. ORDONAREA NUMERELOR REALE

Breviar teoretic

1. **Adunarea**: este operaţia care asociază la fiecare pereche (x,y) de numere reale, numărul real $x+y$ numit suma lui x cu y.

Pentru orice numere reale a,b,c au loc proprietăţile:

a) $a+b=b+a$ (*comutativitatea*)

b) $(a+b)+c=a+(b+c)$ (*asociativitatea*)

c) $a+0=0+a=a$ (0 este *element neutru* la adunare)

d) $a+(-a)=(-a)+a=0$ (orice număr real a are un opus, notat $-a$)

2. **Înmulţirea**: este operaţia care asociază la orice pereche (x,y) de numere reale, numărul xy numit produsul lui x cu y.

Pentru orice numere reale x,y,z au loc proprietăţile:

a) $x\cdot y=y\cdot x$ (*comutativitatea*)

b) $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$ (*asociativitatea*)

c) $x\cdot 1=1\cdot x=x$ (1 este *element neutru* la înmulţire)

d) $x\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\cdot x=1,\ x\neq 0$ (orice număr real nenul x, are un invers notat $\frac{1}{x}$)

e) $x\cdot(y+z)=xy+xz$ (înmulţirea este distributivă faţă de adunare)

- **Diferenţa** numerelor x,y este numărul $x-y$ cu proprietatea că $x-y=x+(-y)$.
- Dacă $x,y\in\mathbb{R},\ y\neq 0,$ se defineşte *câtul* numerelor x şi y, notat $\frac{x}{y}$ sau $x:y$, cu proprietatea că $\frac{x}{y}=x\cdot\frac{1}{y}$.

3. **Puterea cu exponent întreg.**

- Dacă $a\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow a^n=\underbrace{a...a}_{n\ ori};\ a^0=1.$
- Dacă $a\in\mathbb{R}^*$ şi $n\in\mathbb{N}\Rightarrow a^{-n}=\frac{1}{a^n}.$
- Dacă $a,b\in\mathbb{R}$ şi $m,n\in\mathbb{Z},$ atunci au loc proprietăţile:

a) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ b) $a^m:a^n=a^{m-n}$ c) $(a^m)^n=a^{mn}$ d) $a^m\cdot b^m=(ab)^m$ e) $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n},\ b\neq 0$

4. **Rădăcina pătrată** a unui număr real pozitiv x este numărul real pozitiv, notat $\sqrt{x}$, al cărui pătrat este notat cu x.

Reguli de calcul cu radicali. Fie $a,b\in(0,+\infty)$

a) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ b) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ c) $(\sqrt{a})^m=\sqrt{a^m}$ d) $c\sqrt{x}=\begin{cases}\sqrt{c^2x}, & c\geq 0,\ x\geq 0\\ -\sqrt{c^2x}, & c<0,\ x\geq 0\end{cases}$

e) $\sqrt{x^2}=|x|$ f) $\sqrt{0}=0.$

5. **Ordonarea numerelor reale**

- a este *mai mic* ca $b\,(a<b)$ dacă pe axa numerelor punctul $A(a)$ este la stânga punctului $B(b)$.
- a este *mai mic sau egal* cu $b\,(a \le b)$ dacă $a<b$ sau $a=b$.
- Dacă $a,b \in \mathbb{R}$, atunci $a<b$ sau $a=b$ sau $a>b$ (legea de trihotomie).
- Proprietăți ale relației '$\le$' (relația de ordine pe $\mathbb{R}$)

a) Reflexivitatea: $a \le a$, $\forall a \in \mathbb{R}$.
b) Antisimetria: $a \le b,\ b \le a \Rightarrow a=b$.
c) Tranzitivitatea: $a \le b$, $b \le c \Rightarrow a \le c$.
d) Pentru orice $x,y \in \mathbb{R} \Rightarrow x \le y$ sau $y \le x$.

- Alte proprietăți:

e) $a \le b \Rightarrow a+x \le b+x,\ \forall a,b,x \in \mathbb{R}$ f) $a \le b \Rightarrow ax \le bx,\ \forall a,b \in \mathbb{R},\ x \ge 0$
g) $a \le b,\ x<0 \Rightarrow ax \ge bx$ h) $a \le b \Rightarrow -a \ge -b$
i) $\dfrac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2},\ \forall a,b \in (0,\infty)$. (inegalitatea mediilor)

Exerciții și probleme rezolvate

1. Să se efectueze:

a) $\left(\dfrac{7}{48}+\dfrac{13}{24}-\dfrac{3}{4}\right)\cdot 6\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{10}$. b) $\left(-\dfrac{3}{4}\right)\cdot\dfrac{14}{11}:\dfrac{33}{484}-(-2)^3-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2:\dfrac{4}{9}$.

Soluție a) Se aduce la același numitor în paranteză și se introduce întregul în fracție. Se obține succesiv:
$\left(\dfrac{7}{48}+\dfrac{13}{24}-\dfrac{3}{4}\right)\cdot 6\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{10}=\left(\dfrac{7}{48}+\dfrac{26}{48}-\dfrac{36}{48}\right)\cdot\dfrac{32}{5}-\dfrac{1}{10}=\dfrac{-3}{48}\cdot\dfrac{32}{5}-\dfrac{1}{10}=-\dfrac{3}{3}\cdot\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{10}=-\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{10}==\dfrac{-4-1}{10}=$
$=-\dfrac{1}{2}$. b)Avem succesiv: $\left(-\dfrac{3}{7}\right)\cdot\dfrac{14}{11}\cdot\dfrac{484}{33}-(-8)-\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{9}{4}=-\dfrac{3}{1}\cdot\dfrac{2}{11}\cdot\dfrac{44}{3}+8-1=-\dfrac{3}{1}\cdot\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{4}{3}+7=-1$

2. Să se efectueze: a) $4^2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^9\cdot\left(\dfrac{1}{8}\right)^7\cdot 16^5$; b) $\dfrac{\left(4^2\right)^{-3}}{3^2}\cdot\dfrac{\left(2^3\right)^7}{6^2}\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^7$.

Soluție Folosim operațiile cu puteri cu aceeași bază.

a) $4^2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^9\cdot\left(\dfrac{1}{8}\right)^7\cdot 16^5=\left(2^2\right)^2\cdot\dfrac{1}{2^9}\cdot\dfrac{1}{\left(2^3\right)^7}\cdot\left(2^4\right)^5=2^4\cdot\dfrac{1}{2^9}\cdot\dfrac{1}{2^{21}}\cdot 2^{20}=\dfrac{2^4\cdot 2^{20}}{2^9\cdot 2^{21}}=\dfrac{2^{24}}{2^{30}}=$

$=2^{24-30}=2^{-6}=\dfrac{1}{2^6}=\dfrac{1}{64}$. b) Avem succesiv:

$$\frac{4^{-6}}{3^2}\cdot\frac{2^{21}}{(3\cdot 2)^2}\cdot\frac{3^7}{2^7}=\frac{\left(2^2\right)^{-6}}{3^2}\cdot\frac{2^{21}}{3^2\cdot 2^2}\cdot\frac{3^7}{2^7}=\frac{2^{-12}\cdot 2^{21}\cdot 3^7}{3^2\cdot 3^2\cdot 2^2\cdot 2^7}=\frac{2^9\cdot 3^7}{2^9\cdot 3^4}=\frac{3^7}{3^4}=3^{7-4}=3^3=27.$$

3. Se dau numerele reale: $a=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$; $b=\sqrt{4}+\sqrt{8}-\sqrt{12}$ și $c=3\sqrt{2}$.
Să se calculeze: a) $2a-b$. b) $(2a-b)^2-c^2$.

Soluție a) Scriem numărul b mai simplu scoțând factori de sub radical și obținem: $b=2+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}$.
Rezultă că $2a-b=2\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\left(2+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)=2+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

b) $(2a-b)^2-c^2=\left(4\sqrt{3}\right)^2-\left(3\sqrt{2}\right)^2=16\cdot 3-9\cdot 2=48-18=30$.

4. Se dau numerele: $a=\sqrt{5^2-5}-\sqrt{18}$ și $b=\sqrt{\left(9\cdot 4^{n+1}\right):2^{2n+1}}+2\sqrt{5}$

a) Să se scrie sub formă simplă a și b.

b) Să se calculeze media aritmetică și media geometrică a numerelor a și b.

Soluție a) $a=\sqrt{25-5}-\sqrt{18}=\sqrt{20}-\sqrt{18}=2\sqrt{5}-3\sqrt{2}$.

$b=\sqrt{\left(9\cdot 4^{n+1}\right):2^{2n+1}}+2\sqrt{5}=\sqrt{3^2\cdot 2^{2n+2}:2^{2n+1}}+2\sqrt{5}=\sqrt{3^2\cdot 2^{2n+2-2n-1}}+2\sqrt{5}=$

$=\sqrt{3^2\cdot 2}+2\sqrt{5}=3\sqrt{2}+2\sqrt{5}$. b) $m_{arit}=\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{2}=2\sqrt{5}$.

$m_{geom}=\sqrt{ab}=\sqrt{\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)}=\sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2-\left(3\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{20-18}=\sqrt{2}$.

5. Fie a și b numere reale pozitive. Să se arate că $\dfrac{a+b}{2}\le\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

Soluție Folosim proprietatea că dacă $x,y\in(0,\infty)$ și $x\le y$ atunci $x^2\le y^2$. Așadar, ridicăm la pătrat ambii membrii și obținem $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\le\dfrac{a^2+b^2}{2}\Leftrightarrow\dfrac{a^2+b^2+2ab}{4}\le\dfrac{a^2+b^2}{2}$. Înmulțim inegalitatea cu 4 și obținem: $a^2+b^2+2ab\le 2a^2+2b^2$. Trecem toți termenii în membrul întâi și obținem succesiv: $-a^2+2ab-b^2\le 0\Leftrightarrow-\left(a^2-2ab+b^2\right)\le 0\Leftrightarrow-(a-b)^2\le 0$. Deoarece inegalitatea obținută este adevărată rezultă că inegalitatea inițială este adevărată.

6. Să se compare numerele $a=\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{5}}$ și $b=\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}\right)^2$.

Soluție Aducem numerele a și b la formă mai simplă. Pentru a, amplificăm fracțiile cu expresiile conjugate numitorilor și obținem: $a=\dfrac{2-\sqrt{5}}{2^2-5}+\dfrac{2+\sqrt{5}}{2^2-5}=\dfrac{2-\sqrt{5}+2+\sqrt{5}}{2^2-5}=\dfrac{4}{4-5}=-4$.

$b=\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}\right)^2=1^2-\left(\sqrt{2}\right)^2-2=1-2-2=-3$. Așadar, $a=-4$, $b=-3$ și $-4<-3$, deci $a<b$.

7. Dacă $a,b,c\in(0,+\infty)$, să se demonstreze că: a) $(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$; b) $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\ge 0$.

Soluție a) Folosim inegalitatea mediilor: $m_{arit}\ge m_{geom}$. Avem: $a+b\ge 2\sqrt{ab}$, $b+c\ge 2\sqrt{bc}$, $c+a\ge 2\sqrt{ca}$. Înmulțim aceste inegalități de numere pozitive între ele și se obține concluzia.

b) Înmulțim inegalitatea cu 2 și formăm o sumă de pătrate perfecte. Avem:
$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc\ge 0\Leftrightarrow(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\ge 0$, adevărată.

8. Dacă $x_1,x_2,\dots,x_n\in(0,+\infty)$ și $x_1+x_2+\dots+x_n=1$, să se arate că: $\dfrac{x_1x_2}{x_1+x_2}+\dfrac{x_2x_3}{x_2+x_3}+\dots+\dfrac{x_nx_1}{x_n+x_1}<\dfrac{1}{2}$.

Soluție Aplicăm inegalitatea $m_{armonica}\le m_{aritm.}$. Avem: $\dfrac{2x_1x_2}{x_1+x_2}\le\dfrac{x_1+x_2}{2}$; $\dfrac{2x_2x_3}{x_2+x_3}\le\dfrac{x_2+x_3}{2}$;...;

$\dfrac{2x_nx_1}{x_n+x_1}\le\dfrac{x_n+x_1}{2}$. Însumăm aceste inegalități și obținem $2\left(\dfrac{x_1x_2}{x_1+x_2}+\dfrac{x_2x_3}{x_2+x_3}+\dots+\dfrac{x_nx_1}{x_n+x_1}\right)\le x_1+x_2+$ $+\dots+x_n=1$. Împărțim cu 2 și obținem inegalitatea din concluzia problemei.

Exerciții și probleme propuse

Exersare

1. Fie $x=2,7154...$ și $y=1,4287...$. Aflați primele trei cifre după virgulă ale sumei $x+y$.
2. Fie $x=2,1468...$ și $y=1,5431...$. Aflați primele două cifre după virgulă ale produsului xy.
3. Aflați primele două cifre după virgulă ale numărului $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

4. Aflați primele trei cifre după virgulă ale numărului $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$.

5. Să se arate că următoarea expresie este pătrat perfect: $E=(x+1)^2(x^2+1)+x^2$.

6. Se consideră numerele: $x=\frac{29}{10^3}, y=\frac{42}{10^2}$. Să se scrie sub formă de fracție zecimală numerele $x+y; y-x$.

7. Calculați: $x=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}, y=\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}, z=\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$.

8. Calculați produsul: $P=(1+2)(1+2^2)(1+2^4)(1+2^8)(1+2^{16})(1+2^{32})(1+2^{64})$.

9. Să se efectueze: $\dfrac{172\cdot\frac{5}{6}-170\cdot\frac{1}{3}+8\cdot\frac{5}{12}}{0,9\cdot 0,25}$.

10. Să se demonstreze egalitatea: $\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}=0,\ a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq b\neq c$.

11. Calculați: $E=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{18}}\cdot\frac{\sqrt{50}}{5}$.

12. Se dau numerele $x=\sqrt{3}-1, y=\sqrt{3}+1$. Arătați că numărul $E=\sqrt{3}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ este întreg.

13. Aflați $x,y\in\mathbb{Q}$ pentru care $\frac{x\sqrt{2}+y}{\sqrt{2}-1}\in\mathbb{Q}$.

14. Dacă $\frac{x}{x^2+x+1}=a\in\mathbb{R}^*$, calculați $\frac{x^3}{x^6+x^3+1}$.

15. Dacă x,y,z sunt numere reale strict pozitive, astfel încât $x+y-z=2$ și $2xy-z^2=4$, atunci $x=y=z$.

16. Dacă x,y,z,t sunt numere reale astfel încât oricare două sunt diferite între ele, să se demonstreze egalitatea: $\frac{y}{x(x+y)}+\frac{z}{(x+y)(x+y+z)}+\frac{t}{(x+y+z)(x+y+z+t)}=\frac{y+z+t}{x(x+y+z+t)}$.

Aprofundare

17. Să se arate că numerele raționale $\frac{1}{n}$ și $\frac{m}{n}$, unde m și n sunt prime între ele, au același număr de cifre în perioadă.

18. Să se arate că oricare ar fi numărul întreg n, suma $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}$ se reprezintă printr-o fracție periodică mixtă. La fel pentru $\frac{n^2+1}{n(n^2-1)}$.

19. Demonstrați că pentru orice $x\in\mathbb{N}$, există $y,z\in\mathbb{N}$, astfel încât numărul $(x+1)(y+1)(z+1)$ să fie de forma a^6 cu $a\in\mathbb{N}$.

20. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$, fie numărul $a=\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+...+\frac{1}{1+2+3+...+n}$. Să se determine $n\in\mathbb{N}^*$, știind că $a\in\mathbb{N}$.

21. Comparați numerele:
a) 3,14254... și 3,12454...; b) 2,1342... și 2,1382...; c) −1,13257876... și −1,13257768....

22. Se dau numerele: $2,61;\ -3,14;\ 2,(6);\ -\frac{22}{7}$.

a) Ordonaţi aceste numere; b) Ordonaţi opusele lor.

23. Se dau numerele reale $a=\frac{5}{6}$ şi $b=\frac{7}{8}$.

a) Calculaţi numerele reale $1-a$ şi $1-b$ şi apoi comparaţi-le;

b) Comparaţi numerele reale a şi b.

24. Fie $a,b\in\mathbb{R}_+$, $a<b$ şi A media lor aritmetică, G media geometrică, H media armonică. Să se verifice inegalităţile: $H<G<A$ (inegalitatea mediilor).

25. Dacă $a,b,c\in\mathbb{R}$, astfel încât $a+b+c=1$, atunci $a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}$.

26. Să se demonstreze că dacă a,b,c sunt numere pozitive, atunci $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2$.

27. Fie $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. Demonstraţi că: $\frac{1+2^{\frac{2}{n}}+3^{\frac{2}{n}}+4^{\frac{2}{n}}}{\left(2^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}\right)\left(1+2^{\frac{1}{n}}+4^{\frac{1}{n}}\right)}<2^{\frac{1}{n}}$.

28. Fie numărul raţional $a=\sum_{k=1}^{20}\frac{k(k+1)}{(2k+1)^2}$. Demonstraţi că $a\in\left(\frac{22}{5},5\right)$.

29. Dacă $a\in(0,8)$ demonstraţi că $\left(1+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{8-a}}\right)\geq\frac{9}{4}$.

Dezvoltare

30. Dacă $a,b,c,d\in(0,\infty)$ să se arate că $\frac{d+a^2}{d+bc}+\frac{d+b^2}{d+ca}+\frac{d+c^2}{d+ab}\geq 3$.

31. Dacă $a\in\mathbb{R}$ şi $n\in\mathbb{N}$ arătaţi că: $a^{2n}+a^{2n-1}+...+a^2+a+1>\frac{1}{2}$.

32. Să se arate că primele două zecimale ale numărului $\sqrt{4n^2+n}$ sunt aceleaşi pentru orice număr natural $n\geq 3$.

33. Fie a,b,c,d numere reale pozitive, astfel încât $abcde=1$. Să se arate că:

$$\frac{(a+b+c)^2}{2a+3b+4c}+\frac{(b+c+d)^2}{2b+3c+4d}+\frac{(c+d+e)^2}{2c+3d+4e}+\frac{(e+a+b)^2}{2e+3a+4b}\geq 5.$$

34. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$ şi $x_1,x_2,x_3,...,x_n\in\mathbb{R}$. Să se arate că: $\frac{3(n-1)(n-2)}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}x_k^2\geq\sum_{1\leq k<i<j\leq n}\left(x_k+x_i+x_j\right)^2$

35. Să se demonstreze că dacă $a_i>0, i=1,2,...,n$ are loc inegalitatea:

$$\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_1a_3}+...+\sqrt{a_{n-1}a_n}\leq\frac{n-1}{2}(a_1+a_2+...+a_n).$$

36. Arataţi că:

a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$ $(\forall)\ a+b>0$; b) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 2\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}\right), (\forall)x,y,z>0$.

37. Dacă $\sqrt{2009+a}+\sqrt{2009+b}-2\sqrt{2009+c}; a,b,c>0$, atunci $a+b\geq 2c$.

38. Fie a,b,c numere strict pozitive, astfel că $ab+bc+ca=1$. Să se demonstreze că:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\sqrt{3}+\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}.$$

39. Dacă $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}\geq\sqrt{6}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ unde a,b,c sunt laturile unui triunghi, atunci triunghiul este dreptunghic.

40. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ şi $a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 < \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Arătaţi că cel puţin două dintre aceste numere sunt egale.

1.2 MODULUL UNUI NUMĂR REAL

Breviar teoretic

- Fie x un număr real.

Modulul numărului real x sau **valoarea absolută** a numărului x este: $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.

- Proprietăţi ale modulului:

a) $|a| \geq 0, \ \forall a \in \mathbb{R}$ b) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ c) $|-a| = |a|, \ \forall a \in \mathbb{R}$

d) $|a+b| \leq |a| + |b|, \ \forall a, b \in \mathbb{R}$ e) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \ \forall a, b \in \mathbb{R}$ f) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \ \forall a \in \mathbb{R}, \ \forall b \in \mathbb{R}^*$

g) $|a| \leq c \Leftrightarrow -c \leq a \leq c$ h) $|a| \geq c \Leftrightarrow a \leq -c$ sau $a \geq c$ i) $\sqrt{a^2} = |a|, \ \forall a \in \mathbb{R}$.

Exerciţii şi probleme rezolvate

1. Să se compare numerele $a = \left|1 - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right|$ şi $b = \left|-1 - \sqrt{\frac{5}{3}}\right|$.

Avem că $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} > 1$, deci $1 - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} < 0$ şi $\left|1 - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} - 1 = a$;

$b = \left|-\left(1 + \sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right| = \left|1 + \sqrt{\frac{5}{3}}\right| = 1 + \sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} + 1$. Rezultă că $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} - 1 < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} + 1$, adică $a < b$.

2. Să se calculeze:

a) $|2\sqrt{2} - 3| - |-\sqrt{2}| + 3 \cdot |1 - \sqrt{2}|$; b) $\sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{(3 + \sqrt{2})^2}$.

a) Avem că $2\sqrt{2} - 3 < 0$, $-\sqrt{2} < 0$, $1 - \sqrt{2} < 0$. Aplicând formula $|a| = -a$, dacă $a < 0$, se obţine:

$|2\sqrt{2} - 3| - |-\sqrt{2}| + 3 \cdot |1 - \sqrt{2}| = 3 - 2\sqrt{2} - \sqrt{2} + 3(-1 + \sqrt{2}) = 3 - 2\sqrt{2} - \sqrt{2} - 3 + 3\sqrt{2} = 0$.

b) **Expresia** se scrie astfel: $\sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{(3 + \sqrt{2})^2} =$

$= |\sqrt{2} - \sqrt{3}| + \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} + |3 + \sqrt{2}| = -\sqrt{2} + \sqrt{3} + |2 - \sqrt{3}| + 3 + \sqrt{2} = \sqrt{3} + 3 + 2 - \sqrt{3} = 5$.

3. Să se determine numerele reale care verifică egalităţile:

a) $|x| = 5$; b) $|3x - 2| = 0$; c) $|4x - 5| = 3$; d) $|x - 6| = -1$.

a) Ecuaţia $|x| = 5$ este echivalentă cu $x = 5$ sau $x = -5$.

b) $|3x - 2| = 0 \Leftrightarrow 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$. c) $|4x - 5| = 3 \Leftrightarrow 4x - 5 = 3$ sau $4x - 5 = -3$.

Din $4x - 5 = 3 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$, iar din $4x - 5 = -3 \Rightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

d) Ecuaţia $|x - 6| = -1$ nu are soluţii reale doarece $|x - 6| \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$, iar $-1 < 0$.

4. Să se rezolve: a) $3|2x| - 7,4 = \frac{1}{5} \cdot |2x| + 1$; b) $|5x - 2| < 8, \ x \in \mathbb{Z}$.

a) Notăm $|2x| = y$ şi ecuaţia devine: $3y - 7,4 = \frac{1}{5} \cdot y + 1$. Înmulţim ecuaţia cu 5 şi obţinem ecuaţia:

$15y - 37 = y + 5$ care este echivalentă cu ecuația $14y = 42$ cu soluția $y = 3$. Revenind la notație se obține ecuația $|2x| = 3$, echivalentă cu $2x = 3$ sau $2x = -3$. Se obțin soluțiile $x = \frac{3}{2}$, $x = -\frac{3}{2}$.

b) Aplicăm proprietatea $|a| < c \Leftrightarrow -c < a < c$. Rezultă succesiv: $|5x - 2| < 8,\ x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$ $-8 < 5x - 2 < 8,\ x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -6 < 5x < 10,\ x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{6}{5} < x < 2,\ x \in \mathbb{Z}$. Soluția inecuației: $x \in \{-1, 0, 1\}$.

5. Să se calculeze $\sqrt{a^2} + \sqrt{(5-a)^2} - 3\sqrt{a^2 - 6a + 9}$, știind că $a < 0$.

Expresia se scrie sub forma echivalentă astfel: $|a| + |5 - a| - 3 \cdot \sqrt{(a-3)^2} = |a| + |5 - a| - 3|a - 3|$. Deoarece $a < 0$ rezultă că $5 - a > 0$ și $a - 3 < 0$, iar $|a| = -a$, $|5 - a| = 5 - a$, $|a - 3| = -a + 3$. Se obține expresia: $-a + 5 - a - 3(-a + 3) = a - 4$.

Exerciții și probleme propuse

Exersare

1. a) Calculați: $\left|7{,}2(8) - \frac{51}{7}\right|$; $\left|\sqrt{1{,}21} - \sqrt{1{,}44}\right|$; $\left|\sqrt{6} + 1 - \frac{1}{\left|1-\sqrt{3}\right| - \left|1 - \sqrt{2}\right|}\right|$;

b) Verificați următoarele proprietăți:
$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$; $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0$; $|x + y| \leq |x| + |y|$; $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$, pentru perechile de numere $(2{,}11; -1{,}4)$ respectiv $(8\sqrt{3}, 4\pi)$;

c) Calculați:
$|1 - 2^n| + |2^n - 3|, n \in \mathbb{N}$; $\left|\frac{-n - n(n-1) - \ldots - 1}{-n - 1}\right|, n \in \mathbb{N}^*$; $\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{2016 \cdot 2017} - \frac{2016}{2017}\right|$;
$\left|\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} - \sqrt{6 - 4\sqrt{2}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{2}}\right|$;

d) Exprimați cu ajutorul modulului inegalitățile:
$y - \frac{1}{2} < x < y + \frac{1}{2}, x, y \in \mathbb{R}$; $y - \frac{1}{3} < x < y + \frac{1}{3}, x, y \in \mathbb{Z}$; $-2 < x < 6, x \in \mathbb{R}$; $a < x < b,\ a, x, b \in \mathbb{R}$.

2. Reprezentați pe axa numerelor reale mulțimile:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| = 1\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid |x^2 - 3x + 2| + |x^2 - 2x| = 0\}$;

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 1| \leq 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 1| \geq 1\}$;

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| + |x - 2| = 1\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| + |8 - x| = 7\}$;

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid (x + |x|)(x - |x|) = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x + |x| = 0\}$;

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| \leq y, (\forall) y \in \mathbb{R}_+^*\} \cap \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left|a + \frac{1}{a}\right| \geq x, (\forall) a \in \mathbb{R}^*\right\}$.

3. Găsiți valoarea de adevăr a propozițiilor de mai jos:

a) Ecuația: $x^2 - 4|x| + 3 = 0, x \in \mathbb{R}$, are patru soluții reale;

b) Inecuația: $|x|(1 + x) \leq 0, x \in \mathbb{R}$, are mulțimea soluțiilor $(-\infty, -1]$;

c) Dacă ecuația: $|x + 3| - a|x - 1| = 4, x \in \mathbb{R}$, a este parametru real, are muțimea soluțiilor intervalul $[-3, 1]$, atunci $a = -1$;